Théorème 10 (Théorème de la double limite en $+\infty$)
Soit I un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
On suppose que :

(i) *(f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle du type $[R,+\infty[$) ;*

(ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.*

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right).$$

Théorème 10 (Théorème de la double limite pour les séries de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que :

(i) *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur un voisinage V de a (relatif à A).*

(ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n \in \mathbb{K}$.*

Alors, la série numérique $\sum \ell_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, et on a $S(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Théorème 13 (Dérivation d'une limite de fonctions)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

(ii) *La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{K}$.*

(iii) *La suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \to \mathbb{K}$;*

Alors, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = f' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'.$$

Théorème 13 (Dérivation terme à terme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$.*

(ii) *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \to \mathbb{K}$ sur I.*

(iii) *La série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers $T : I \to \mathbb{K}$.*

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$. Autrement dit, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Théorème 12 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{K}$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors sa somme est continue, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt.$$

Théorème 7 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre)
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) *$\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;*

(ii) *$\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.*

(iii) *$\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*

(iv) *il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.*

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, avec

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

- Ex 53 (continuité et limite en $+\infty$ d'une série de fonctions).
- Ex. 29 : Fonction Gamma (def, formule factorielle, dérivabilité)
- Ex. 49 : Exemple long d'utilisation du th. d'intégration terme à terme

---

Exercice 1246 *Pour $x > 0$, on pose* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$

1. *Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.*
2. *Montrer que S est continue.*
3. *Étudier la monotonie de S.*
4. *Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.*
5. *Déterminer un équivalent à S en 0.*

Exercice 1248 *On pose pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_0(x) = 1, \quad u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2)dt$$

Montrer que la série de terme général u_n converge normalement.

Exercice 1282 *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt} dt$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 1284 *Soit* $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. *Justifier l'existence et calculer* $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$.
2. *Justifier que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.*
3. *En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.*

Exercice 1247 *Montrer que* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$ *est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.*

Exercice 1244 *On note $\mathbb{1}_I$ la fonction caractéristique d'un intervalle I :*

$$\mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in I \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0; +\infty[$ de la série de fonctions de terme général :

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} \mathbb{1}_{[n;n+1[}(x)$$