- **(MPI*)** Enoncé et preuve du lemme 19 (existence d'une vp réelle pour un auto-adjoint) + lemme 20 (les SEP d'un auto-adjoint sont orthogonaux) + théorème 21 (théorème spectral).
- Enoncé et preuve des théorèmes 1 (représentation des formes linéaires d'un espace euclidien) et 2 (existence et unicité de l'adjoint).
- Ex. 78 : Propriétés des isométries vectorielles
- Ex. 63 : Endomorphismes qui commutent avec leur adjoint

Exercice 1286 *Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que $Ker(f^*) = (Im(f))^\perp$ et $Im(f^*) = (Ker(f))^\perp$*
2. *On suppose maintenant que f est un projecteur.*
   (a) *Démontrer que f^* est un projecteur.*
   (b) *Montrer que $f^* = f$ si et seulement si f est la projection orthogonale sur $Im(f)$.*
   (c) *On suppose maintenant que f et f^* commutent.*
      i. *Démontrer que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.*
      ii. *Démontrer que $Ker(f \circ f^*) \cap Im(f) = \{0\}$*
      iii. *En déduire que $Ker(f \circ f^*) = Ker(f)$ et que $Im(f \circ f^*) = Im(f)$.*
   (d) *En déduire que f et f^* commutent si et seulement si $f = f^*$.*

Exercice 1287 *Soit E un espace euclidien de dimension $n > 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel.*

1. *Montrer que*
$$f(x) = x + k(x|a)a$$
définit un endomorphisme symétrique de E.
2. *Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.*

Exercice 1288 *On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire définie par*
$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

1. *Montrer que la relation*
$$u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$$
définit un endomorphisme u de l'espace E.
2. *Vérifier que l'endomorphisme u est symétrique*
3. *Calculer la trace de u.*