

Liste des exercices de la banque INP :

- Tout sauf les exercices de probabilités (95-112) et ceux de calcul diff (33,41,52,56,57,58).
Ca en fait beaucoup !

8, 34 et 90

Exercice 980 Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$(x^2 - x)y'' - (2x^2 - 1)y' + (4x - 2)y = 0$$

Exercice 977 Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y \\ \dot{y} = -3x - 5y \\ \dot{z} = -3x - 6y - 5z \end{cases}$$

Exercice 1 Soient $q \in \mathcal{C}([a; +\infty[, \mathbb{R}^+)$ et l'équation différentielle

$$y'' = q(x)y \tag{1}$$

1. Soit f une solution de (1) telle que $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$. Montrer que f et f' sont strictement positives et que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Soient u et v les solutions de (1) telles que

$$\begin{cases} u(a) = 1 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(a) = 1. \end{cases}$$

Montrer que, sur $]a; +\infty[$, u/v et u'/v' sont monotones et de monotonies contraires. Montrer que u/v et u'/v' tendent en $+\infty$ vers la même limite réelle.

3. Montrer qu'il existe une unique solution g de (1), strictement positive, telle que $g(a) = 1$ et telle que g soit décroissante sur $[a; +\infty[$.
4. Déterminer g lorsque $q(x) = 1/x^4$ sur $[1; +\infty[$. On pourra poser $y(x) = xz(1/x)$.

Exercice 2 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Exercice 979 On considère l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$$

1. Chercher des solutions développables en série entière.
2. Que peut-on en déduire ?