Exercices :

Calcul diff : 33, 58.

Proba : 110.

Exercice 1099 *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément deux boules au hasard. On note X le plus petit des deux numéros et Y le plus grand.*

1. *Montrer que la loi conjointe du couple $(X;Y)$ est donnée par*

$$\forall (i;j) \in [\![1;n]\!]^2, \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)} & si\ i<j \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2. *En déduire les lois marginales du couple $(X;Y)$.*
3. *Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$. En déduire $Cov(X;Y)$.*

Exercice 1111 *Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ et u un endomorphisme symétrique de E.*

1. *Montrer que l'application $f : x \mapsto (u(x)|x)$ de E vers $\mathbb{R}$ est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de E.*

---

2. *Montrer que l'application*

$$F : x \in E\backslash\{0_E\} \mapsto \frac{(u(x)|x)}{(x|x)}$$

est différentiable sur $E\backslash\{0_E\}$ et que sa différentielle vérifie, pour tout $a \in E\backslash\{0_E\}$,

$$dF(a) = 0 \Leftrightarrow a \text{ est vecteur propre de } u.$$

Exercice 1112 *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'en tout point la matrice de la différentielle de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est antisymétrique.*

Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b.$$