

Exercice 854 On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)|$. Soit $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \int_0^1 (P(t))^3 dt$. Démontrer que ϕ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

Exercice 901 Un joueur partie à la roulette : il décide de jouer 1€ sur une couleur (rouge ou noire) à chaque partie. Le plateau contient 37 cases : 18 rouges, 18 noirs et 1 vert. Si la couleur choisie sort, il gagne 1€ et récupère sa mise, sinon, il perd sa mise. Soit X_n le gain du joueur après n parties :

$$X_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{s'il gagne la } (n+1)\text{-ième partie,} \\ X_n - 1 & \text{s'il perd la } (n+1)\text{-ième partie.} \end{cases}$$

1. Identifier la loi de la variable $Y_n = \frac{X_n + n}{2}$.
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n .
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}(X_n > 0) \leq \frac{\text{Var}(X_n)}{\mathbb{E}(X_n)^2}$.
4. En déduire une estimation (par excès) du plus petit entier n tel que : $\mathbb{P}(X_n \leq 0) \geq 95\%$.

Exercice 853 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$f(M) = (\text{tr}(M), \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^n)).$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Comparer le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal de M .
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 851 Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$ et u un endomorphisme symétrique de E .

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto (u(x)|x)$ de E vers \mathbb{R} est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de E .
2. Montrer que l'application

$$F : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{(u(x)|x)}{(x|x)}$$

est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que sa différentielle vérifie, pour tout $a \in E \setminus \{0_E\}$,

$$dF(a) = 0 \Leftrightarrow a \text{ est vecteur propre de } u.$$

Exercice 893 On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soient A et B deux événements. Montrer $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer $\|G_X(t) - G_Y(t)\| \leq \mathbb{P}(X \neq Y) \quad \forall t \in [0; 1]$.

Exercice 892 1. Soit deux variables aléatoires X, Y définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans \mathbb{N} .

Sous réserve d'existence, on note

$$d(X; Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|$$

- (a) Montrer que $d(X; Y) = 2 \sup\{|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.
Indication : $M^+ = \{k \in \mathbb{N}; \mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(Y = k)\}$ et $M^- = \mathbb{N} \setminus M^+$.
- (b) Montrer que $d(X; Y) \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$.

2. Soit $f : x \in [0; 1] \mapsto 1 - (1 - x)e^x$. On admet que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$.

On considère $U_1, \dots, U_n, X_1, \dots, X_n$ des v.a. mutuellement indépendantes. On suppose que $\forall i \in [1; n], U_i \sim \mathcal{P}(f(\frac{\Delta}{n}))$ et $Y_i \sim \mathcal{P}(\frac{\Delta}{n})$ avec $\lambda \in [0; n]$. On pose X_i la variable qui vaut 0 si $U_i = Y_i = 0$ et 1 sinon.

- (a) Déterminer la loi de $X = X_1 + \dots + X_n$.
- (b) Déterminer la loi de $Y = Y_1 + \dots + Y_n$.
- (c) Montrer que $\forall t \in [1; n], \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \lambda^2/n^2$.
- (d) En déduire l'inégalité de Le Cam : $d(X; Y) \leq 2\lambda^2/n$.