- Enoncé et démonstration du théorème 78 (idéaux de $\mathbb{K}[X]$).
- Ex 85 (multiplicité d'une racine et factorisation de polynômes)
- Ex 89 (calcul d'une somme de sinus)

Exercice 1116 *Un sous-groupe H de $(G, \cdot)$ est dit distingué si*

$$\forall x \in H, \forall a \in G, axa^{-1} \in H$$

1. *Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes au départ de $(G, \cdot)$ est distingué.*
2. *Soient H, K deux sous-groupes de $(G, \cdot)$.*
   On suppose le sous-groupe H distingué, montrer que l'ensemble

   $$HK = \{xy | x \in H, y \in K\}$$

   est un sous-groupe de $(G, \cdot)$.

Exercice 1119 *Un anneau A est dit régulier si $\forall x \in A, \exists y \in A, xyx = x$.*
On considère un tel anneau A et l'on introduit $Z = \{x \in A | \forall a \in A, ax = xa\}$.

1. *Montrer que Z est un sous-anneau de A.*
2. *Vérifier que Z est régulier.*

Exercice 1121 *Un idéal I d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est dit premier si et seulement si :*

$$\forall x, y \in A, xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I$$

1. *Donner un exemple d'idéal premier dans $\mathbb{Z}$.*
2. *Est-ce que tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont premiers ?*
3. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible. Montrer que $P\mathbb{K}[X]$ est premier.*
4. *Soient J et K deux idéaux de A et I un idéal premier. Montrer que*

   $$J \cap K = I \Rightarrow (J = I \text{ ou } K = I)$$

5. *Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif dont tout idéal est premier. Montrer que A est intègre puis que A est un corps.*

Exercice 1124 *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$$

Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.