

EXERCICE 60 algèbre

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

EXERCICE 71 algèbre

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
 2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.
- Démonstration de : "Une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est injective ssi u transforme toutes les familles libres $(e_i)_{i \in I}$ en familles libres $(u(e_i))_{i \in I}$ " (cours MP2I, CH.18).
-

Exercice 717 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi} \\ X & \mapsto X + X^T - \text{tr}(X)A \end{cases}$

1. Montrer que φ est linéaire et déterminer M , la matrice de φ , dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $\det(M)$.
2. Déterminer si $\text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 723 Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. On appelle $\mathcal{B}_e = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_f = (f_1, f_2)$ celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3; \quad e'_2 = e_3 + e_1; \quad e'_3 = e_1 + e_2; \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2); \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}_{e'} = (e'_1; e'_2; e'_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ puis que $\mathcal{B}_{f'} = (f'_1; f'_2)$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?
3. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Exercice 1134 Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z + a\bar{z} \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$?
3. Déterminer le noyau et l'image de f .
4. Écrire la matrice de l'application f dans la base $(1 + i; 1 - i)$.