- **(MPI*)** CH6 : Enoncé et preuve théorème 1 (supplémentaire orthogonal) + corollaire 3 (double orthogonal)
- Ex 76 (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- Ex 80 (calcul de projeté orthogonal avec fonctions trigo)
- Ex 81, 82 (calcul de distance avec des matrices 2*2)

Exercice 1173 *Soient l'espace* $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R}) | f(0) = 0\}$ *et* N *l'application définie sur* E *par*

$$N(f) = N_\infty(3f + f')$$

1. *Montrer que* (E, N) *est un espace vectoriel normé*
2. *Montrer qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $N_\infty(f) \leq \alpha N(f)$.
3. *Les normes* N_∞ *et* N *sont-elles équivalentes ?*

Exercice 1176 1. *Quelles sont les valeurs de* $a \in \mathbb{R}$ *pour lesquelles l'application*

$$(x;y) \mapsto N_a(x;y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ *?*

---

2. *Si* N_a *et* N_b *sont des normes, calculer*

$$\inf_{(x;y)\neq(0;0)} \frac{N_a(x;y)}{N_b(x;y)} \text{ et } \sup_{(x;y)\neq(0;0)} \frac{N_a(x;y)}{N_b(x;y)}$$

Exercice 1178 *Soit* $E = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$
Soit E^+ *l'ensemble des fonctions de* E *qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois.*
Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ *et pour toute fonction* $f \in E$ *on pose :*

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\varphi(t)dt$$

1. *Montrer que* $\|.\|_\varphi$ *est une norme sur* E
2. *Montrer que si* φ_1 *et* φ_2 *sont deux applications strictement positives de* E^+ *alors les normes associées sont équivalentes.*
3. *Les normes* $\|.\|_{(x\mapsto x)}$ *et* $\|.\|_{(x\mapsto x^2)}$ *sont elles équivalentes ?*

Exercice 1172 *Montrer que l'application* $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$N(x_1, x_2) = \sup_{t\in[0;1]} |x_1 + tx_2|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Représenter la boule unité fermée pour cette norme et comparer celle-ci à $\|.\|_\infty$.

Exercice 1174 *Sur* $\mathbb{R}[X]$ *on définit* N_1 *et* N_2 *par :*

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t\in[-1;1]} |P(t)|$$

1. *Montrer que* N_1 *et* N_2 *sont deux normes sur* $\mathbb{R}[X]$.
2. *Étudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général*

$$P_n = \frac{1}{n} X^n$$

3. *Les normes* N_1 *et* N_2 *sont-elles équivalentes ?*

Exercice 998 *Munissons* $\mathbb{R}^4$ *du produit scalaire usuel.*
Soient $u_1 = (2;1;0;2)$, $u_2 = (-4;1;0;-1)$, $u_3 = (1;3;-4;-1)$, $u_4 = (9;9;5;-9)$.

1. *Montrer que* $(u_1;u_2;u_3;u_4)$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Orthonormaliser la base* $(u_1;u_2;u_3;u_4)$ *selon le procédé de Gram-Schmidt.*
3. *Soit* $\mathcal{P}$ *le plan de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par* u_1, u_2 *et soit* s *la symétrie orthogonale par rapport à* $\mathcal{P}$. *Quelle est la matrice de* s *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *?*