- Ex 36 (caractérisation de la continuité des applications linéaires)
- Ex 38 (normes triples)
- Ex 45 (convexité et distance)

Exercice 1179 *Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé E est ouvert alors $F = E$.*

Exercice 1180 *On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.*

1. *Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ des suites réelles bornées.*
2. *$\mathcal{B}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ étant normé par $\| \,.\, \|_\infty$,*
   (a) *le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie ouverte ?*
   (b) *le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie fermée ?*

Exercice 1182 *Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E alors son adhérence $\bar{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.*

Exercice 1183 *Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E.*

1. *Montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense de E.*
2. *En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides est aussi d'intérieur vide.*

Exercice 1185 *Soit A une partie d'un espace normé E.*

1. *Montrer que : A fermée $\Leftrightarrow Fr(A) \subset A$.*
2. *Montrer que : A ouverte $\Leftrightarrow A \cap Fr(A) = \emptyset$.*

Exercice 1184 *Soient $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note $N_\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par*

$$N_\varphi(f) = \| f\varphi \|_\infty .$$

Montrer que N_φ est une norme sur E si, et seulement si, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est dense dans $[0;1]$.