

- (MPI*) Enoncé et preuve du théorème 19 (lemme de décomposition des noyaux).
- (MPI*) Enoncé et preuve du théorème 15 (de Cayley-Hamilton).
- Ex. 65 (Composition sur $\mathbb{K}[u]$ et applications aux polynômes annulateurs)
- Ex 9, 10, 11 (exemples d'études de CVU)

Théorème 9 (Théorème de la double limite)

Soit $A \subset E$, où E est un evn de dimension finie. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ et $a \in \overline{A}$. On suppose que :

- (i) (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V de a relatif à A ;
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Propriété 11 (Convergence uniforme des primitives)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si (f_n) converge uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ sur tout segment de I , alors pour tout $a \in I$, la suite de fonctions (F_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Théorème 13 (Dérivation d'une limite de fonctions)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- (ii) La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.
- (iii) La suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$;

Alors, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I , f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et $f' = g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n = f' = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'.$$

Exercice 1249 Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de polynôme minimal $X^2 + 1$?

Exercice 1250 Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$$

Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A) = 0$?

Exercice 1252 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

1. Calculer A^2 .
2. Selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dire si la matrice A est, ou non, diagonalisable.

Exercice 1253 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non triviaux. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G . Enfin on pose pour f endomorphisme de F

$$\phi(f) = p \circ f \circ s$$

ce qui définit un endomorphisme ϕ sur $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que ϕ annule un polynôme « simple ». L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?
2. Déterminer les éléments propres de ϕ .

Indication : on pourra considérer les matrices de p et s dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$

Exercice 1235 1. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.

2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})dx$.

Exercice 1237 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(t) = n \left(f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t) \right)$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.
2. Que dire de la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ quand f est seulement $\mathcal{C}^1$?