— Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, préciser le vecteur $f(\overrightarrow{u})$ pour les fonctions f suivantes :

1. f est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
2. f est la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
3. f est la symétrie centrale par rapport à $(0, 0)$.
4. f est la symétrie par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).
5. f est la translation de vecteur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ donné.

— Exprimer sous forme de courbe paramétrée $\mathscr{C} = \{\mathrm{M}(t) \mid t \in \mathrm{I}\}$ (pour une fonction vectorielle M et un intervalle réel I à préciser) les ensembles suivants :

1. La droite de $\mathbb{R}^3$ passant par un point A donné et dirigée par un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ donné.
2. Le cercle de $\mathbb{R}^2$ centré en $(0, 0)$ et de rayon $\mathrm{R} > 0$.
3. Le graphe d'une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ donnée.

Ensuite, pour chacune de ces trois courbes paramétrées, déterminer la tangente à la courbe en un point $\mathrm{M}(t_0)$ donné.

— Pour une courbe paramétrée de la forme $\mathscr{C} = \{\mathrm{M}(t) \mid t \in \mathrm{I}\}$ pour une fonction vectorielle $\mathrm{M} \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}^2)$, et pour un réel $t_0 \in \mathrm{I}$, si $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{M}^{(p)}(t_0) \neq (0,0)\right\}$ et $q = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \det\left(\mathrm{M}^{(p)}(t_0), \mathrm{M}^{(q)}(t_0)\right) \neq 0\right\}$,

1. Quelle est la tangente à $\mathscr{C}$ au point $\mathrm{M}(t_0)$?
2. En notant $(\mathrm{X}(t), \mathrm{Y}(t))$ les coordonnées du point $\mathrm{M}(t)$ dans le repère $\left(\mathrm{M}(t_0), \mathrm{M}^{(p)}(t_0), \mathrm{M}^{(q)}(t_0)\right)$, donner des équivalents simples de $\mathrm{X}(t)$ et $\mathrm{Y}(t)$ au voisinage de t_0.
3. Comment appelle-t-on le point $\mathrm{M}(t_0)$ si p est pair ?
   Et si p et q sont impairs ?

Exercice 835 *Étudier la courbe $\mathcal{C}$ définie par le paramètrage* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{1+3t} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$

Exercice 837

Étudier la courbe $\mathcal{C}$ définie par le paramètrage $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t+2}{(t-1)^2} \end{cases}$

Exercice 847 *Soit la fonction* $f : t \mapsto \left(te^{-t^2}; t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$.
Dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $M(t)$ le point de coordonnées $f(t)$ et Γ la courbe paramétrée associée.

1. *Déterminer le domaine de définition de f. Peut-on réduire le domaine d'étude ? Si oui, comment et sur quel domaine ?*
2. *Existe-t-il des points réguliers ? singuliers ? Si oui, lesquelles ?*
3. *Déterminer, si elles existent, les tangentes horizontales/verticales de Γ.*
4. *Déterminer, si elles existent, les asymptotes horizontales/verticales de Γ.*