

- Enoncer et démontrer le lemme d'Abel.
- Soit f une fonction de la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie sur un voisinage ouvert I de 0.

Démontrer la formule

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

- Qu'appelle-t-on le rayon de convergence d'une série entière?
Enoncer sa propriété fondamentale.
 - Si deux suites (a_n) et (b_n) sont telles que $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout n , quelle relation existe-t-il entre les rayons de convergences des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$?
Et si $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |b_n|$?
-

Exercice 917 Rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$?

Exercice 939 Rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$?

Exercice 943 Rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, où a_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre e ?

Exercice 848 1. Étudier la courbe définie par le paramétrage $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) &= t(t+1)(t-1) \\ y(t) &= -t^4 + t^2 - 1 \end{cases}$$

2. On admet que la courbe possède un unique point triple. Déterminer l'expression de la longueur des deux boucles passant le point triple, c'est-à-dire la longueur de l'arc paramétré $\{M(t) = (x(t); y(t)) | t \in [t_1; t_3]\}$ où $t_1 < t_2 < t_3$ sont les réels vérifiant $M(t_1) = M(t_2) = M(t_3)$.

On ne cherchera pas à calculer explicitement la longueur.

Exercice 849 Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, où $\mathcal{C}_1$ est l'hélice définie par

$$r_1(t) = (\cos(t); \sin(t); t), t \in [0; 3\pi]$$

et $\mathcal{C}_2$ est définie par

$$r_2(t) = (-1 + 4t; 3t; 3\pi + \pi t), t \in [0; 2].$$

Calculer la longueur de $\mathcal{C}$.