

Exercice 421 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique : $\langle A; B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales.

Exercice 422 On considère l'application :

$$(P; Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto (P; Q) = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{x}} dx$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}_n[X]; \langle \cdot; \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.
2. Déterminer, grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt, une base orthonormée de l'espace $\mathbb{R}_1[X]$ à partir de sa base canonique.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Calculer $d(X^2; \mathbb{R}_1[X])$.

Exercice 417 1. La famille $((-1; 1; 1); (1; -1; 1); (1; 1; -1))$ est-elle une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique ? Si non, l'orthonormaliser à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

2. Donner la décomposition de $(1; 1; 1)$ dans la base ainsi obtenue

Exercice 420 Soit $(\mathbb{R}_3[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace euclidien muni du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^3 a_k b_k$ où $P(X) = \sum_{k=0}^3 a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^3 b_k X^k$.

Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(1) = 0, P(-1) = 0\}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ définie comme étant la projection orthogonale sur G .

1. Déterminer une base orthonormée de G .
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, ainsi que la matrice de f dans la base $(1; X; X^2; X^3)$.

3. Diagonaliser f

Exercice 418 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)}{2}$.

Exercice 425

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\langle A; B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $(E; \langle \cdot; \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.
3. Construire une base orthonormée de E .
4. Déterminer le projeté orthogonal de $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur E . Calculer $d(u; E)$.