Démonstration :

- Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (préciser les cas d'égalité).

Cours :

— Enoncer l'identité du parallélogramme.
Enoncer une identité de polarisation.

— Dans un espace préhilbertien E, définir la distance $d(x, \mathrm{F})$ d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ à un sous-espace F de dimension finie de E.
Préciser la formule donnant cette distance en fonction de $\|x\|$ et $\|p_{\mathrm{F}}(x)\|$.
Si E est euclidien et $\dim(\mathrm{F}^{\perp}) < \dim(\mathrm{F})$, quelle autre méthode intéressante peut-on appliquer pour calculer $d(x, \mathrm{F})$?

Exercice 996 *1. La famille $((-1;1;1);(1;-1;1);(1;1;-1))$ est-elle une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique ? Si non, l'orthonormaliser à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.*

2. Donner la décomposition de $(1;1;1)$ dans la base ainsi obtenue

Exercice 998 *Munissons $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel.*
Soient $u_1 = (2;1;0;2)$, $u_2 = (-4;1;0;-1)$, $u_3 = (1;3;-4;-1)$, $u_4 = (9;9;5;-9)$.

1. *Montrer que $(u_1;u_2;u_3;u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*
2. *Orthonormaliser la base $(u_1;u_2;u_3;u_4)$ selon le procédé de Gram-Schmidt.*
3. *Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2 et soit s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. Quelle est la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?*

Exercice 1002 *$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique : $\langle A;B\rangle = Tr(A^T B)$. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales.*

Exercice 1016 *On considère l'application :*

$$(P;Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto \langle P;Q\rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{x}} dx$$

1. *Montrer que $(\mathbb{R}_n[X]; \langle .;. \rangle)$ est un espace euclidien.*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}$, calculer $\|X^n\|$.*

Exercice 1018 *Soit $(\mathbb{R}_3[X], \langle .|. \rangle)$ l'espace euclidien muni du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{3} a_k b_k$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{3} b_k X^k$.*
Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(1) = 0, P(-1) = 0\}$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ définie comme étant la projection orthogonale sur G.

1. *Déterminer une base orthonormé de G.*
2. *Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$, ainsi que la matrice de f dans la base $(1;X;X^2;X^3)$.*
3. *Diagonaliser f.*

Exercice 997 *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)}{2}$.*