Démonstration :

- Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée, et $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ l'espace euclidien de dimension n muni de son produit scalaire canonique. On pose $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
  1. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers E.
  2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = x \cdot y$.
- Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (préciser les cas d'égalité).
- Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie dont une base orthonormée est $(e_1, \dots, e_k)$.
  Pour tout vecteur $x \in E$, énoncer et démontrer la formule donnant le projeté orthogonal de x sur F en fonction de $(e_1, \dots, e_k)$.

Cours :

— Qu'appelle-t-on « produit scalaire » sur un espace vectoriel réel E?
Qu'appelle-t-on « espace euclidien »?

— Dans un espace euclidien E, pour tout sous-espace vectoriel F de E, exprimer la dimension de $F^\perp$ en fonction de celle de F.
Est-il vrai que F et $F^\perp$ sont toujours en somme directe?
Est-il vrai que F et $F^\perp$ sont toujours supplémentaires? (dans le cas présent où E est un espace euclidien)

— Pour un espace préhilbertien E et un sous-espace vectoriel F de E, définir la projection orthogonale p_F sur F.
Préciser $\mathrm{Ker}(p_F)$ et $\mathrm{Im}(p_F)$.
Si E est euclidien, exprimer le lien entre p_F et $p_{F^\perp}$.

Exercice 1007 *On considère l'application :*

$$(P;Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \mapsto \langle P;Q \rangle = \int_0^1 x^2 P(x)Q(x)dx$$

1. *Montrer que $(\mathbb{R}_2[X]; \langle .;. \rangle)$ est un espace euclidien.*
2. *Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.*
3. *Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.*
4. *Calculer $d(X^2; \mathbb{R}_1[X])$.*

Exercice 1015 *On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{V}ect(e_1; e_2; e_3; e_4)$ avec :*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer une base orthonormée de E pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$.*
2. *Déterminé le projeté orthogonal de $u = (-2; 0; 2; -4)^T$ sur E.*

Exercice 1017 *Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.*
On admet que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 1008

1. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\langle A; B \rangle = Tr(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $(E; \langle .;. \rangle)$ est un espace euclidien.*
3. *Construire une base orthonormée de E.*
4. *Déterminer le projeté orthogonal de $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur E. Calculer $d(u; E)$.*

Exercice 1004 *On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P; Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$*

1. *Établir, par récurrence, l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.*
2. *Étudier la parité des polynômes P_n (indication : on pourra considérer la famille $((-1)^n P_n(-X))$).*
3. *Prouver que pour chaque $n > 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est un élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.*
4. *En déduire qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$.*