Démonstration :

- Pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, montrer que $f \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Cours :

— 1. Donner la forme de tous les éléments du groupe orthogonal $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, en précisant les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
  2. Dans un espace euclidien orienté E de dimension **deux** :
     (a) Donner la matrice de la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ dans n'importe quelle base orthonormée directe.
     (b) Donner la forme de la matrice d'une réflexion dans une base orthonormée directe quelconque, puis préciser une matrice réduite (diagonale).

— Donner deux définitions équivalentes des matrices orthogonales. **Préciser ce qu'est le groupe spécial orthogonal $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.**
Soit E un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
  1. Donner une condition nécessaire et suffisante en fonction de f pour que la matrice $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(f)$ soit orthogonale.
  2. Pour toute famille $\mathscr{B}'$ de dim(E) vecteur(s) de E, donner une condition nécessaire et suffisante en fonction de $\mathscr{B}'$ pour que la matrice $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ soit orthogonale.
  3. Quelles sont les matrices orthogonales diagonalisables, et quelles isométries représentent-elles ?

— Dans un espace euclidien orienté E de dimension **trois** :
  1. Donner la matrice de la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour de l'axe orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}$ dans n'importe quelle base orthonormée directe commençant par $\overrightarrow{i}$.
  2. Donner une matrice réduite (diagonale) de n'importe quelle réflexion.
  3. Donner la matrice de l'antirotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour de l'axe orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}$ dans n'importe quelle base orthonormée directe commençant par $\overrightarrow{i}$.
     En déduire une interprétation des antirotations en termes de rotations et de réflexions.

Exercice 1074 *Soient* $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. *Pour quels valeurs de* $a, b \in \mathbb{R}$, *a-t-on* $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ *?*
2. *Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est* A.

Exercice 1070 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Diagonaliser, quand c'est possible, A *dans une base orthonormée.*

Exercice 1065 *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $\forall u \in E, f(u) = u - 2\langle u; v\rangle v$ *avec* $v \in E$ *un vecteur unitaire. Est-ce que* f *est une isométrie ?*

Exercice 1079 *Expliciter la matrice* M *dans la base canonique* $\mathcal{B} = (i; j; k)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *de la réflexion d'axe* $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.