COURS :

On considère un entier $n \geq 1$, une partie A de $\mathbb{R}^n$, un point $a \in \mathbb{R}^n$, une fonction $f : A \to \mathbb{R}$.

— Si $a \in \overline{A}$, montrer que si $f(u) \xrightarrow[u \to a]{} \ell_1$ et $f(u) \xrightarrow[u \to a]{} \ell_2$ pour des réels ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

— Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, montrer que

$$\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\right] \iff \exists C \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = C(y).$$

— Enoncer le théorème de Schwarz.

— Que signifie "le point a est adhérent à A" ?

— Que signifie "la partie A est ouverte" ?

Que signifie " f admet un maximum global en a" ?

EXERCICES :

Exercice 1107 *Représenter graphiquement le domaine suivant :*

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 4 + y^2 \geq 0 \ \ et\ \ x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq -4\}$$

2. L'ensemble D est-il ouvert, fermé, borné ? (justifier)

Exercice 1108 *On pose*

$$f : (x; y) \mapsto \frac{4x + 7y}{x + 3y - 5}$$

1. *Quel est le domaine de définition, noté D, de f ?*
2. *Représenter graphiquement D.*
3. *Est-ce que D est un ouvert ? fermé ? Est-ce que D est borné ? (justifier)*

Exercice 1109 *On pose* $\forall (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x; y; z) = (z + 1)\sin(y^2 + xz - 2)$$

1. *Calculer, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z)$.*
2. *Que vaut $\nabla f(1; 2; -2)$?*
3. *Expliciter le développement limité de f à l'ordre 1 au point $(1; 2; -2)$.*

Exercice ~~427~~ 1101

1. *Trouvez toutes les applications de* $\mathcal{C}^1(\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}; \mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   indication : on utilisera le changement de variables polaires.

2. *Donner un exemple de solution de* $\boxed{(1)}$ *tel que* $f(1;0) = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 33 analyse

On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f\,(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

1105

Exercice ~~431~~ *Soit* $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1. *Trouvez toutes les applications de* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 0$$

   indication : on utilisera le changement de variables $u = x + y$ et $v = x + ay$.

2. *Donner un exemple de solution de* $\boxed{(2)}$ *tel que* $f(0;0) = 1$.

Exercice 1106 *Déterminer le maximum et le minimum global de* f *sur* $\forall(x;y) \in [0;1] \times [0;1]$ *sachant que*

$$f(x;y) = y^3 + x^2 - 3xy$$