— Montrer qu'un endomorphisme f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

— Qu'appelle-t-on base d'un sous-espace vectoriel F de E ?

— Tout projecteur de E est-il un automorphisme de E ?
Toute symétrie de E est-elle un automorphisme de E ?

— Pour deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E, si p désigne le projecteur sur F parallèlement à G, quelle est la nature de $\mathrm{Id}_E - p$?

EXERCICE 60 algèbre

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

EXERCICE 71 algèbre

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 1133 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y) = (3x - y; -x + 3y)$.

1. *Montrer que* $f \in GL(E)$ *où* $E = \mathbb{R}^2$.
2. *On pose* $s = f - 3Id_E$, *montrer que* s *est une symétrie vectorielle et déterminer ses éléments* $Ker(s - Id_E)$ *et* $Ker(s + Id_E)$.
3. *On pose* $p = \frac{1}{2}f - Id_E$. *Que peut-on conclure après avoir calculé* p^2 ?
4. *Déterminer* $Ker(p)$ *et* $Im(p)$.