Démonstration :

- Montrer que si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$, alors $\mathrm{Im}(g)$ est stable par f.

Cours :

- On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ d'un espace vectoriel E, et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
  A partir de cette seule matrice, déterminer deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que $\dim(\mathrm{F}) = 1$ et tels que F et G soient stables par f (justifier la réponse).
- Donner une condition nécessaire et suffisante en termes de noyau pour qu'un scalaire λ soit une valeur propre de f.

Dans le cas où E est de dimension finie :

- Donner une condition nécessaire et suffisante en termes de déterminant pour qu'un scalaire λ soit une valeur propre de f.

Exercice 787 *Soient $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme associé à la matrice A :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Répondre aux questions ci-dessous sans calculer le polynôme caractéristique.

1. *Uniquement en examinant la matrice A, trouver un sous-espace stable de f. En déduire une valeur propre et un vecteur propre de f.*
2. *Est-ce que 2 est une valeur propre de A ? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre associé.*
3. *Est-ce que 1 est une valeur propre de A ? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre associé.*

Exercice 788 *Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*

1. *La droite $\mathcal{V}ect((1;1;1))$ est-elle stable par f ?*
2. *Le plan P d'équation $y + z = 0$ est-il stable par f ?*

Exercice 789 *Soit $a \geq 2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x;y;z) = (-y; x + ay + z; x + y + z)$.*

1. *Est-ce que la valeur -1 est une valeur propre de f ? Si oui, déterminer une base du sous-espace propre associé. Même question pour 1.*
2. *Est-ce que le vecteur $u = (1; -a; -1)$ est un vecteur propre de f ? Si oui, déterminer la valeur propre associée. Même question pour $v = (a; 1; -a + 1)$.*
3. *Déterminer M, la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
4. *Uniquement en examinant la matrice M, trouver un sous-espace stable de f. En déduire une valeur propre et un vecteur propre de f.*

Exercice 745 *Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}. Démontrer que $\Delta_n = a^{n-2}\left(a^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)$*

Exercice 759 *Soit l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $f(M) = 2M + M^T$.*

1. *$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, calculer $\det(f(M))$. Peut-on en déduire $\det(f)$? Si non, calculer $\det(f)$.*
2. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.*

/tsi2.040.tex

Exercice 742 *Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$*

Indication : on pourra commencer par remplacer la première colonne C_1 du déterminant par la somme $C_1 + \ldots + C_n$ de toutes les colonnes du déterminants.