- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ où $\dim(\mathrm{E}) = n$. Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda\}$, alors f est diagonalisable si et seulement si $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ où $\dim(\mathrm{E}) = n$. Montrer que si χ_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable.
- Montrer que la matrice d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est diagonale si et seulement les éléments de $\mathscr{B}$ sont des vecteurs propres de f.

- Qu'appelle-t-on valeur propre d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
  Qu'appelle-t-on vecteur propre de A?
  Qu'appelle-t-on spectre de A, noté Sp(A) ?
- Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Est-il vrai que si $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda\}$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Que signifie qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable? Si tel est le cas, que signifie «diagonaliser f»?
  Que signifie qu'une matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$? Si tel est le cas, que signifie «diagonaliser A»?

Exercice 760 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \overset{\varphi}{\to} & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + M^T - tr(M)A \end{array} \right.$ *Peut-on diagonaliser φ ? Si oui, le faire.*

Exercice 768 *Pour $a \in \mathbb{R}$, soit* $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix}$ *et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M_a.*
Déterminer les valeurs propres de f_a ainsi que ses sous-espaces propres.

Exercice 770 *Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n ($n \in \mathbb{N}$). Soit $\mathcal{B}$ une base de E et l'endomorphisme f de E tel que*

$$\forall i,j \in \{1;\dots;n\}, \quad [Mat_{\mathcal{B}}(f)]_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 3 & \text{si } i=j, \\ 1 & \text{si } i+1=j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

f est-il diagonalisable ? Si oui, diagonaliser f.

Exercice 790 *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 0 \\ 10 & 8 & 0 \\ -5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_3$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ?*
2. *Sans calculer le polynôme caractéristique de A, comparer la diagonalisabilité de A en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
3. *Quand c'est possible, diagonaliser A.*

Exercice 772

1. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ? La diagonaliser le cas échant.*
2. *Résoudre l'équation $X^2 = A$.* On pourra remarquer que si X est solution de $X^2 = A$ alors X et A commutent.