- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$. Si $\text{rg}(A) = 1$, montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, montrer qu'elle y est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$.
- Pour une suite vectorielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une matrice carrée A telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner et démontrer une formule explicite de X_n en fonction de A et n.

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme en dimension finie soit trigonalisable.
- Rappeler la formule du binôme de Newton pour une somme de deux matrices (préciser à quelle condition elle est valable).

Exercice 797 *Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

---

1. *Quelles sont les valeurs propres de f ?*
2. *Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*
3. *On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Exercice 796 *Soit f l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(x;y;z) = (x-y-z; 6x-3y-4z; -y)$ et A sa matrice dans la base canonique. f est-il diagonalisable ? Si oui, le diagonaliser.*

Exercice 814 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire que f est trigonalisable.*
2. *Sans déterminer de sous-espace propre, démontrer que f n'est pas diagonalisable.*
3. *Notons $g = f - 2id_{\mathbb{R}^3}$ et $B = A - 2I_3$ sa matrice dans la base canonique.*
   (a) *Calculer B^2.*
   (b) *Déterminer une base de $Ker(g)$, puis démontrer que $Ker(g)$ et $\mathcal{V}ect(e_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.*
   (c) *Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est triangulaire supérieure.*
   (d) *Donner la matrice de f dans cette base.*
4. *Déterminer la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$.*