- Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
  Qu'appelle-t-on la variance (donner la définition) et l'écart-type de X ?
  Enoncer la formule de Kœnig-Huygens.
- Qu'appelle-t-on la probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A, notée $P_A(B)$, et quelle est sa signification ?
  Enoncer la formule de Bayes.
- Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
  Que signifie que «X suit une loi binomiale» ?
  Préciser alors son espérance et sa variance.

Exercice 646 *On dispose d'une urne qui contient 3 boules jaunes et 2 boules vertes et dans laquelle on peut insérer autant de boules rouges que l'on veut. Toutes les boules sont indiscernables au toucher et l'expérience consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne. Soit $n \in \mathbb{N}$ le nombre de boules rouges que l'on a mis dans l'urne.*

1. *Prouver que la probabilité de tirer deux boules rouges est nulle si $n < 2$ et vaut $\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ sinon.*
2. *Est-il possible de choisir n de sorte que la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur soit inférieure à $\dfrac{1}{2}$? Si oui, déterminer quelles valeurs de n conviennent.*

Exercice 642 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et une application $\phi_n : [\![1;3]\!] \to [\![1;p]\!]$. Quelle est la probabilité que ϕ_n soit une surjection ?*

Exercice 815 *Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f est trigonalisable*
2. *Soit e_1 un vecteur propre de f pour la valeur propre 1. Montrer qu'il existe un vecteur $e_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(f - id_{\mathbb{R}^3})(e_2) = e_1$ et $(e_1; e_2)$ libre.*
3. *Soit e_3 un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$.*
4. *Calculer $f^k(e_2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k.*
5. *Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Exercice 2 *Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.*
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobailité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note :

- *A_n l'évènement « l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet. »*
- *B_n l'évènement « l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet. »*
- *C_n l'évènement « l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet. »*

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) *Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
   (b) *Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
2. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$*
   (a) *Prouver que $-\frac{1}{2}$ est une valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.*
   (b) *Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.*
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

---

3. *Montrer comment les résultats des questions précédentes, peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.*
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandé.

Exercice 817 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.*

1. *Déterminer les éléments propres de A. En déduire l'expression de A^n.*
2. *Montrer que A peut s'écrire comme la somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice triangulaire supérieure N qui vérifie $N^k = 0$ avec k à déterminer.*
3. *Peut-on retrouver le résultat précédent en utilisant le binôme de Newton ? Si oui, comment ?*