DÉMONSTRATION :

- Pour des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_{100}$ suivant toutes la même loi, en notant m leur espérance, σ leur écart-type, et M leur moyenne arithmétique $\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$, démontrer l'inégalité suivante :

$$P(M \in]m - \sigma; m + \sigma]) \geq 99\%.$$

Penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev — Pour tout nombre réel strictement positif α ,

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

DÉF. et PROP. :

- Réciter l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, quelle est la loi de $S = \sum_{i=1}^n X_i$?
Rappeler l'espérance et la variance de chaque X_i , puis de S .
- Pour un couple aléatoire (X, Y) , a-t-on toujours $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$?
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 1093 On considère deux v.a. X et Y telle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1; 2; \dots; n\}$, et $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = a \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante a .
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de X . De même pour Y .
3. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(\{X = Y\})$.
5. On pose $U = \max(X; Y)$. Calculer la loi de U .

Exercice 1094 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivent une loi de Bernoulli de même paramètre p . On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Calculer la loi du couple $(U; V)$.
2. Les deux variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 1098 Soit $(U; V)$ un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2; \frac{1}{2})$.

1. On pose $T = (U - 1)(V - 1) + 1$. Déterminer la loi de T .
2. On pose $S = (U - 1)^2 + (V - 1)^2$. Sans calculer de probabilité, déterminer la loi de S .
3. (a) Calculer $\mathbb{E}(S(T - 1))$. En déduire $\text{Cov}(S; T)$.
(b) Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 1099 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément deux boules au hasard. On note X le plus petit des deux numéros et Y le plus grand.

1. Montrer que la loi conjointe du couple $(X; Y)$ est donnée par

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. En déduire les lois marginales du couple $(X; Y)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$. En déduire $\text{Cov}(X; Y)$.